30/4/20

Σύνδεση με τους νόμους του Newton – ολοκληρώματα κίνησης

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός υλικού σημείου κάποιες ποσότητες και κάτω από προϋποθέσεις μπορεί να διατηρούνται. Παράδειγμα η στροφορμή, η ορμή, η ενέργεια κτλ.
Ο νόμος του Newton σε καρτεσιανές συν/νες μπορεί να γραφεί σε μορφή συνιστωσών

$m\cdot\ddot{x}=F_x$, $m\cdot\ddot{y}=F_y$, $m\cdot\ddot{z}=F_z$ (*)

όπου $\vec{x}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}$

και $P_x=m\dot{x}$, $P_y=m\dot{y}$, $P_z=m\dot{z}$

Παρατήρηση: Να επιβεβαιωθεί (*)

Για τη στροφορμή έχουμε:
Αν βρω τη 1 συνιστώσα μπορώ ν.β. και τις υπόλοιπες με κυκλική

$L_x=m(y\dot{z}-\dot{y}z)$, $L_y=m(z\dot{x}-\dot{z}x)$, $L_z=m(x\dot{y}-\dot{x}y)$

εναλλαγή των γραμμάτων
(Παρατήρηση, κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων)

και η ενέργεια $\frac{1}{2}(m\dot{x}+m\dot{y}+m\dot{z})+V(x,y,z)=E$

Αν ξέρω πόσο είναι το E σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ξέρω πόση είναι σε κάθε χρονική στιγμή κι αυτό γιατί E=σταθ.
Ξέρω ότι E=σταθ. χωρίς να έχω λύσει την εξίσωση

Είναι οι ποσότητες που καλούνται και ολοκληρώματα κίνησης.

Έστω ότι η δύναμη $\boxed{\vec{F} = F(x)\hat{i}}$ που προέρχεται από το δυναμικό $V(x)$. Γνωρίζουμε ότι:

* Ξέρω ότι F συντηρητικό

(1) $\boxed{\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}} = m\ddot{x}\hat{i} \Rightarrow F(x) = m\ddot{x} \Rightarrow$ (*)

$\Rightarrow F(x)\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x} \Rightarrow \int F(x)\dot{x}\,dt = m\int \ddot{x}\dot{x}\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int F(x)\,dx = m\int \dot{x}\,d\dot{x} \Rightarrow -V(x) + E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E$ Παρατήρηση: Η εξίσωση (*) λέγεται αυτόνομη γιατί απουσιάζει πλήρως η 1η παράγωγος.

Αυτή η εξίσωση λύνεται με χωρισμό μεταβλητών. Λύνω ως προς την αντιστροφή

(2) Αντίστοιχα, $\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E \Rightarrow$ Παραγωγίζουμε

$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow m\ddot{x} = F(x)$

Δηλαδή $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}})^2 + V(x,y,z) = E$

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας

Τέτοια είναι τα συστήματα που χρειαζόμαστε μόνο μια παράμετρο για να καθορίσουμε πλήρως τη θέση του σώματος. Δηλ. η εξίσωση

$$m\ddot{x} = F(x)$$

ορίζει τη μοναδική παράμετρο $x = x(t)$. Τότε η λύση της καθορίζει τόσο τη θέση ~~του~~ όσο και την ταχύτητα του συστήματος

Ως γνωστόν ένα από τα ολοκληρώματα κίνησης είναι $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E$

$F(x) = -\frac{dV}{dx}$ Χωρισμός μεταβλητών

Δηλαδή $(\dot{x})^2 = \frac{2}{m}[E - V(x)] \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)}$

Τα ± δείχνουν που έχω θετική ή αρνητική ταχύτητα

Τα αντίστοιχα πρόσημα αντιστοιχούν στα τμήματα της τροχιάς όπου $v = \frac{dx}{dt} \gtrless 0$ αντίστοιχα

Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών

$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}[E - V(x)]^{-1/2} dx$$

ή

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x} [E - V(x)]^{-1/2} dx$$

Χρειάζομαι 2 αρχικές συνθήκες:

Εάν γνωρίζουμε την <u>αρχική θέση</u> και <u>ταχύτητα</u> του υλικού σημείου, τότε

σταθ $= \boxed{E = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(x_0)}$: Αυτό παραμένει ίδιο σε κάθε χρόνο, γιατί διατηρείται

Η λύση $x = x(t) = x_0$ για την οποία $E = V(x)$ και άρα $v_0 = 0$ καλείται <u>λύση ισορροπίας</u>. Δηλ. αν το σωματίδιο τοποθετηθεί στο σημείο αυτό ισορροπεί και έχει μηδενική ταχύτητα

Επίσης μιας και η θέση ισορροπίας είναι λύση της εξίσωσης:

$$F(x_0) = 0 \quad \text{και επειδή} \quad F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

το x_0 αντιστοιχεί στα μέγιστα ή ελάχιστα της $V(x)$

Τρόποι εύρεσης των σημείων ισορροπίας

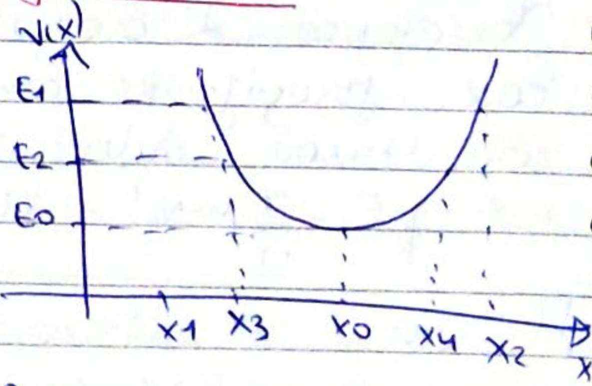
1) Η λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $F(x_0) = 0$
2) —〃— —〃— $E = V(x)$
3) Η εύρεση των ακροτάτων της $V(x)$ ή $\frac{dV}{dx} = 0$

Παρατήρηση: Τα όρια της κίνησης επίσης μπορούν να βρεθούν χωρίς να λύσουμε την διαφορική εξίσωση.
Μιας και $\frac{1}{2} m (\dot{x})^2 = E - V(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{V(x) \leq E}$

Η λύση της εξίσωσης δίνει τα όρια της κίνησης

Δυναμικό που παρουσιάζει ελάχιστο

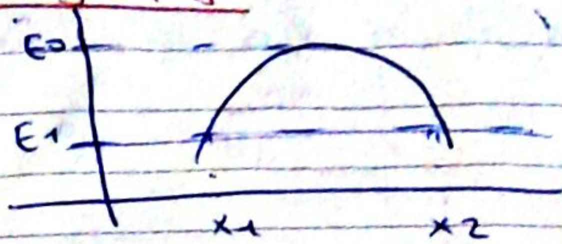
Θεωρούμε το δυναμικό $V = V(x)$ όπως στο σχήμα. E_1 είναι η ενέργεια που αντιστοιχεί στις αρχικές τιμές



Δηλαδή $V(x) \leq E_1 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$
Άρα βρήκαμε τα όρια της κίνησης

Δυναμικό που παρουσιάζει μέγιστο

Αντίστοιχα θεωρούμε το δυναμικό όπως στο σχήμα που παρουσιάζει μέγιστο.



Η λύση της εξίσωσης είναι
$x \le x_1$ και $x \ge x_2$
Δηλ. η επιτρεπόμενη κίνηση γίνεται έξω από τα όρια του δυναμικού
σελ 94

Παράδειγμα: Να β. τα όρια της κίνησης ενός σώματος που εκτοξεύεται σε κατακόρυφη διεύθυνση από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα v_0

Από το νόμο της παγκόσμιας έλξης $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$

και $F = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow -\frac{GMm}{r^2} = m\ddot{r} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$

Γνωρίζουμε ότι για $t=0$ $\begin{cases} r(0)=R & \text{ακτίνα της Γης} \\ \dot{\vec{r}}(0)=v_0 \end{cases}$

άρα: $\frac{1}{2}(\dot{r})^2 = \frac{GM}{r} + C \Rightarrow \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R} = C = E$

ή

$$\frac{1}{2}(\dot{r})^2 - \frac{GM}{r} = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\dot{r})^2 + V(r) = E$$

Τα όρια της τροχιάς δίνονται από τον τύπο:

$$E - V(r) \ge 0 \Leftrightarrow E + \frac{GM}{r} \ge 0 \Rightarrow$$

$$r \le \frac{E}{GM} = \frac{v_0^2}{2GM} - \frac{1}{R^2}$$

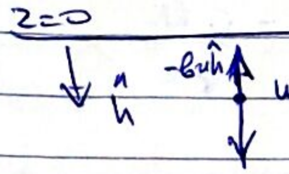
Προφανώς για να υπάρχει κίνηση

$$\frac{v_0^2}{2GM} - \frac{1}{R^a} \geq 0 \Rightarrow v_0^2 \geq \frac{2GM}{R^a}$$

Η τιμή $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R^a}}$ είναι η ταχύτητα διαφυγής

<u>Παράδειγμα</u>

<u>Πτώση με αλεξίπτωτο</u>: Τη στιγμή $t=0$ ένας αλεξιπτωτιστής βάρους mg πέφτει από $z=0$ κατακόρυφα με ταχύτητα v_0. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του για κάθε χρονική στιγμή



$$\left.\right\} \begin{aligned} x &= x(t) \\ v &= \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Από το 2ο νόμο του Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{n} = (mg - bv)\hat{n} \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - b\frac{dx}{dt}$$

$$\Leftrightarrow m\dot{v} + bv = mg \Rightarrow m\dot{v}e^{+bt/m} + bve^{+bt/m} =$$
$$= mge^{+bt/m} \Rightarrow \left(mve^{+bt/m}\right)' = mge^{+bt/m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow mve^{bt/m} = \frac{m^2 g}{b}e^{bt/m} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{mg}{b} + \frac{c}{m}e^{-bt/m}$$ Στο $t=0$ $v=v_0$ δηλ.

$$v_0 = \frac{mg}{b} + \frac{c}{m}$$ Τελικά

$$v = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-bt/m}$$

Παρατήρηση: Για $t \to +\infty$ ή $t \gg 1$ $\quad e^{-bt/m} \approx 0$

δηλ. $\quad v = \frac{mg}{b}$ = σταθερή

Ολοκληρώνουμε $\quad x(t) = \frac{mgt}{b} + \frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)\left(1 - e^{-bt/m}\right)$

Παραγωγίζουμε: $\quad a(t) = \left(g - \frac{bv_0}{m}\right) e^{-bt/m}$

Παρατήρηση: Αν $v_0 = \frac{mg}{F}$!